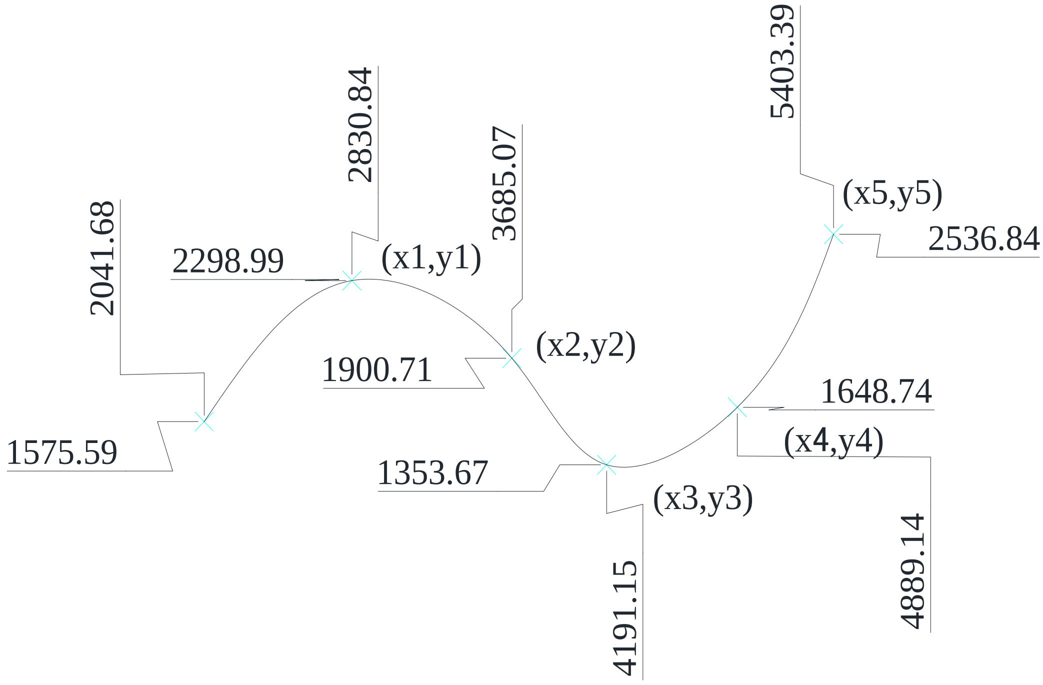
3次スプライン曲線の作成方法

既知点

下図のように6点の既知点からなる3次スプライン曲線を例に算出方法を説明する。



既知点をxn,ynとすると座標一覧は下表のとおりである。

		X	Y
0	0	2041.68	1575.59
1	1	2830.84	2298.99
2	2	3685.07	1900.71
3	3	4191.15	1353.67
N-1	4	4889.14	1648.74
N	5	5403.39	2536.84

3次スプライン曲線による補間の基本

3次スプライン曲線による補間は、各区間(例えば(x_0,y_0)～(x_1,y_1)区間など)事に3次方程式の係数 *an* , *bn* , *cn* , *dn* を算出して描画することである.

三次方程式は下式のとおりである.

(xn,yn)～(xn+1),(yn+1)区間$S_n = a_n(x-x_n)^3 + b_n(x-x_n)^2 + c_n(x-x_n) + d_n$

既知点が0からNまでの場合、式はN-1の補間式が作成できる。

今回の6点が既知点の場合

0 (x0,y0)～(x1),(y1)区間　$S_0 = a_0(x-x_0)^3 + b_0(x-x_0)^2 + c_0(x-x_0) + d_0$

1 (x1,y1)～(x2),(y2)区間　$S_1 = a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1$

2 (x2,y2)～(x3),(y3)区間　$S_2 = a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2$

3 (x3,y3)～(x4),(y4)区間　$S_3 = a_3(x-x_3)^3 + b_3(x-x_3)^2 + c_3(x-x_3) + d_3$

4 (x4,y4)～(x5),(y5)区間　$S_4 = a_4(x-x_4)^3 + b_4(x-x_4)^2 + c_4(x-x_4) + d_4$

各係数の算定

dnの算定

　各区間のスプライン曲線の始終点はすべて既知点を通る。したがって、区間の補間式の両端のxに対するyの値は既知である。

各区間の始点側はx=xnなので(x-xn)=0となる。よって

$$y_n = S_n = a_n(x-x_n)^3 + b_n(x-x_n)^2 + c_n(x-x_n) + d_n$$

$$d_n = y_n$$ 式-1

bnの算定

　隣同士の区間の曲線がスムーズに接続されるには、隣同士の曲線傾きが同一である必要がある。傾きは微分値なので

隣同士の区間の一次導関数、二次導関数の値が同一である必要がある。

とりあえずSn(x)に対する一次・二次導関数を求める

$$S_n = a_n(x-x_n)^3 + b_n(x-x_n)^2 + c_n(x-x_n) + d_n$$

べき乗　$f(x) = x^n$　に対する一次導関数は　$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$

なので、

一次導関数

$$S_n'(x-x_n) = 3a_n(x-x_n)^2 + 2b_n(x-x_n) + c_n$$

二次導関数は、一次導関数をさらに微分したものなので、

$$S_n''(x-x_n) = 6a_n(x-x_n) + 2b_n$$

始点側はx=xnなので(x-xn)=0となる。よって

$$S_n''(x-x_n) = 6a_n(x-x_n) + 2b_n$$

$$b_n = \frac{S_n''(x-x_n)}{2}$$ 式-2

anの算定

隣同士の二次導関数の値は等しいので、

$$S_n''(x-x_n) = 6a_n(x-x_n) + 2b_n$$

$$a_n = \frac{(S_{n+1}''(x) - 2b_n)}{6(x_{n+1}-x_n)}$$

$$a_n = \frac{(S_{n+1}''(x) - S_n''(x))}{6(x_{n+1}-x_n)}$$ 式-3

cnの算定

補間式は、与点を必ず通るので、

$$a_n(x-x_n)^3 + b_n(x-x_n)^2 + c_n(x-x_n) + d_n = y_{n+1}$$

式-1,2,3を代入すると

$$\frac{S_{n+1}''(x) - 2b_b}{6(x_{n+1}-x_n)}(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_n)^3 + \frac{S_n''(x)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2 + c_n(x_{n+1}-x_n) = y_n = y_{n+1}$$

cnについて解くと

$$c_n(x_{n+1}-x_n)=y_{n+1}-y_n-\frac{S_{n+1}''(x)-S_n''(x)}{6(x_{n+1}-x_n)}(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_n)^3-\frac{S_n''(x)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2$$

$$c_n = \frac{y_{n+1} - y_n - \frac{S_{n+1}"(x) - S_n"(x)}{6(x_{n+1} - x_n)}(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_n)^3 - \frac{S_n"(x)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - x_n}$$

$$c_n = \left(y_{n+1} - y_n - \frac{S_{n+1}"(x) - S_n"(x)}{6(x_{n+1} - x_n)}(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_n)^3 - \frac{S_n"(x)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \right) \frac{1}{x_{n+1} - x_n}$$

$$c_n = \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{\left(S_{n+1}"(x) - S_n"(x)\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)^2}{6(x_{n+1} - x_n)} - \frac{S_n"(x)(x_{n+1} - x_n)}{2} \right)$$

上記式の一部を整理するために下式の簡略化をする

$$-\frac{(S_1 - S)(x_1 - x)}{6} - \frac{S(x_1 - x)}{6}$$

展開すると

$$-\frac{S_1 x_1}{6} - \frac{S \times x_1}{3} + \frac{S_1 x_1}{6} + \frac{S \cdot x}{3}$$

整理すると

$$\frac{-S_1 x_1 - 2S \cdot x_1 + S_1 x + 2S \cdot x}{6}$$

$(a + b)(c - d) = -bd - ad + bc + ac$　　より

$$-\frac{1}{6}(x_1 - x)(2S + S_1)$$

整理結果をもとの式に反映させる

$$c_n = \frac{(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)} - \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)(2S_n"(x) + S_{n+1}"(x))$$

二次導関数の算出

隣同士の一次導関数の値は一致する必要があるので

$$S_n'(x_{n+1}) = S_{n+1}"(x_{n+1})$$

一次導関数は

$$S_n'(x - x_n) = 3a_n(x - x_n)^2 + 2b_n(x - x_n) + c_n$$

xn+1の時は

xn+1の時 x-xnは0となるので、

$$3a_n(x_{n+1}-x_n)^2+2b_n(x_{n+1}-x_n)+c_n=c_{n+1}$$

上記式に an,bn,cnの式を代入する。

$$a_n=\frac{S_{n+1}''(x_n)-S_n''(x_n)}{6(x_{n+1}-x_n)}$$

$$b_n=\frac{S_n''(x_n)}{2}$$

$$c_n=\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}-\frac{1}{6}(x_{n+1}-x_n)(2S_n''(x_n)+S_{n+1}''(x_n))$$

$$c_{n+1}=\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})(2S_{n+1}''(x_{n+1})+S_{n+2}''(x_n))$$

$$3(\frac{S_{n+1}''(x_n)-S_n''(x_n)}{6(x_{n+1}-x_n)})(x_{n+1}-x_n)^2+2(\frac{S_n''(x_n)}{2})(x_{n+1}-x_n)$$

$$+(\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}-\frac{1}{6}(x_{n+1}-x_n)(2S_n''(x_n)+S_{n+1}''(x_n)))=$$

$$\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})(2S_{n+1}''(x_{n+1})+S_{n+2}''(x_n))$$

Sn" Sn+1" Sn+2"を式の左側に移行する。

$$(\frac{S_{n+1}''(x_n)-S_n''(x_n)}{2})(x_{n+1}-x_n)+S_n''(x_n)(x_{n+1}-x_n)-\frac{1}{6}(x_{n+1}-x_n)(2S_n''(x_n)+S_{n+1}''(x_n))$$

$$+\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})(2S_{n+1}''(x_{n+1})+S_{n+2}''(x_n))=\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}$$

式を分解する

$$\frac{S_{n+1}''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)-\frac{S_n''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)+S_n''(x_n)(x_{n+1}-x_n)-\frac{1}{3}(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)$$

$$-\frac{1}{6}(x_{n+1}-x_n)S_{n+1}''(x_n))+\frac{1}{3}(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_{n+1})$$

$$+\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}$$

式を整理する

$$S_n''(x_n)\left(-\frac{(x_{n+1}-x_n)}{2}+(x_{n+1}-x_n)-\frac{1}{3}(x_{n+1}-x_n)\right)$$
$$+S_{n+1}''(x_n)\left(\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)-\frac{1}{6}(x_{n+1}-x_n)+\frac{1}{3}(x_{n+2}-x_{n+1})\right)+\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=$$
$$\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}$$

$$S_n''(x_n)\left(\frac{(x_{n+1}-x_n)}{6}\right)+S_{n+1}''(x_n)\left(\frac{1}{3}(x_{n+2}-x_{n+1})\right)$$
$$+\frac{1}{6}(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}$$

式を6倍する

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

各区間の二次導関数について連立方程式を作成する。

今回の6点が既知点の場合

0 (x0,y0)～(x1),(y1)区間

n=0

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

1 (x1,y1)～(x2),(y2)区間

n=1

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

2 (x2,y2)～(x3),(y3)区間

n=2

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

3 (x3,y3)～(x4),(y4)区間

n=3

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

4 (x4,y4)～(x5),(y5)区間

n=4

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

一般的に表すと0～Nまでの既知点がある場合

0～N-2について下記式の連立方程式が成り立つ。

$$(x_{n+1}-x_n)S_n''(x_n)+2\times(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+1}''(x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})S_{n+2}''(x_n)=6\left(\frac{(y_{n+2}-y_{n+1})}{(x_{n+2}-x_n+1)}-\frac{(y_{n+1}-y_n)}{(x_{n+1}-x_n)}\right)$$

なお、S0"(x)=SN-1"(x)=0とする。（自然スプライン）

式を簡素化するために下式とおく。

$$h_n=x_{n+1}-x_n$$

$$h_{n+1}-h_n=x_{n+2}-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n=x_{n+2}-x_n$$

$$k_n=6\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h_n}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

$$2(h_1+h_0)S_1''+h_1S_2''=k_1$$

$$h_1S_1''+2(h_2+h_1)S_2''+h_2S_3''=k_2$$

$$h_2S_2''+2(h_3+h_2)S_3''=k_2$$

より一般的な表記をすると0～N-2について下記式の連立方程式が成り立つ。

n=0の時 $2(h_1+h_0)S_1''+h_1S_2''=k_1$

n=1～N-4 $h_nS_n''+2(h_{n+1}+h_n)S_{n+1}''+h_{n+1}S_{n+2}''=k_{n+1}$

n=N-3 $$h_{N-3}S_{N-3}''+2(h_{N-2}+h_{N-3})S_{N-2}''=k_{N-3}$$

例えば2つ変数がある連立方程式を行列表記すると下式となる。

$$3x-4y=-5$$
$$2x+y=4$$
$$\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ 4\end{bmatrix}$$

解き方はいろいろあるがここではクラメールの公式の例とガウスの消去法を示す。
連立方式を行列で示すと下式のとおりとなる。

$$\begin{bmatrix}2(h_1+h_0) & h_1 & 0\\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2\\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1''\\ S_2''\\ S_3''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}$$

クラメール

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

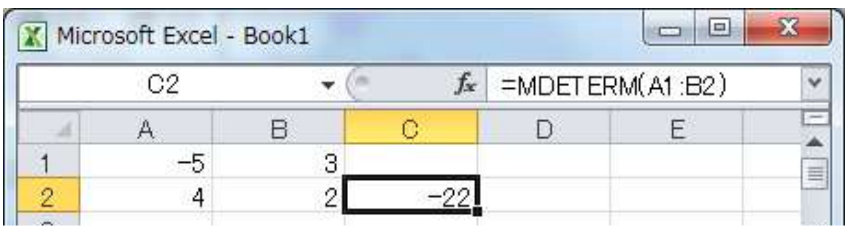
上式の行列が与えられた場合x,yはそれぞれ下式のとおりである。

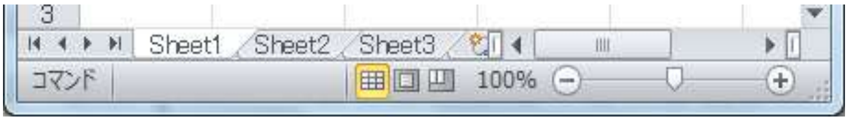
$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{12} & a_{12}\\ a_{22} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

なお、| |は絶対値ではなく、行列の値を求めるという意味である。
例えば
2次の正方行列の場合、下式で解を求めることができる。

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

3次の正方行列の場合サラスの方法により求めることができる。
4次以上については各種方法がある。
また、行列の値は、Excelおよびmaximax等で求めることができる。
Excelの場合、MDETERM関数を用いる




3
Sheet1
Sheet2
Sheet3
コマンド
100%

$$S_1'' = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & h_1 & 0 \\ k_2 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ k_3 & h_2 & 2(h_3+h_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(h_1+h_0) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) \end{vmatrix}}$$

$$S_2'' = \frac{\begin{vmatrix} 2(h_1+h_0) & k_1 & 0 \\ h_1 & k_2 & h_2 \\ 0 & k_3 & 2(h_3+h_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(h_1+h_0) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) \end{vmatrix}}$$

$$S_3'' = \frac{\begin{vmatrix} 2(h_1+h_0) & h_1 & k_1 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & k_2 \\ 0 & h_2 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(h_1+h_0) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) \end{vmatrix}}$$

各hn、knを算定する。

$$h_n = x_{n+1} - x_n$$

$$k_n = 6\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

n	x	y	hn	kn
0	2041.68	1575.59	789.16	
1	2830.84	2298.99	854.23	-8.297492068
2	3685.07	1900.71	506.08	-3.688148198
3	4191.15	1353.67	697.99	9.0220696
4	4889.14	1648.74	514.25	7.825431565
5	5403.39	2536.84		

| 3286.78 854.23 0 | |S1"| -8.297492

$$\begin{vmatrix} 854.23 & 2720.62 & 506.08 \\ 0 & 506.08 & 2408.14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S2'' \\ S3'' \end{vmatrix} = \begin{matrix} -3.688148 \\ 9.0220696 \end{matrix}$$

計算されたhn,knを代入する

$$S1''=\frac{\begin{vmatrix} -8.297492068 & 854.23 & 0 \\ -3.688148198 & 2720.62 & 506.08 \\ 9.0220696 & 506.08 & 2408.14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3286.78 & 854.23 & 0 \\ 854.23 & 2720.62 & 506.08 \\ 0 & 506.08 & 2408.14 \end{vmatrix}} = \frac{-40749772}{1.893E+10}$$

$$= -0.002152$$

$$S2''=\frac{\begin{vmatrix} 3286.78 & -8.297492068 & 0 \\ 854.23 & -3.688148198 & 506.08 \\ 0 & 9.0220696 & 2408.14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3286.78 & 854.23 & 0 \\ 854.23 & 2720.62 & 506.08 \\ 0 & 506.08 & 2408.14 \end{vmatrix}} = \frac{-27130047}{1.893E+10}$$

$$= -0.001433$$

$$S3''=\frac{\begin{vmatrix} 3286.78 & 854.23 & -8.2974921 \\ 854.23 & 2720.62 & -3.6881482 \\ 0 & 506.08 & 9.0220696 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3286.78 & 854.23 & 0 \\ 854.23 & 2720.62 & 506.08 \\ 0 & 506.08 & 2408.14 \end{vmatrix}} = \frac{76640269}{1.893E+10}$$

$$= 0.0040476$$

ガウスの消去法

ガウスの前進消去法を用いて上三角行列を作成する。

a11	a12	a13
a21	a22	a23
a31	a32	a33

上記の行列２列目以降に下式を適用する。

ui1=ai1/a11

aji = aji - ui1 * a1j　　bi=bi-ui1*b1

a11	a12	a13
a21-u11*a11	a22-u11*a12	a23-u11*a13
a31-u31*a11	a32-u31*a12	a33-u31*a13

式が複雑なので適用結果をai j 'と置く

a11'	a12'	a13'
0	a22'	a23'
0	a32'	a33'

更に3行目2列目以降の行に下式を適用する

ui2'=ai2'/a22'

aij'=aji'-ui2*a2j'　　bi=bi-ui1*bi

a11'	a12'	a13'
0	a22'	a23'
0	a32'=a32'-ui2'*a22'	a33'=a33'-ui2'*a23'

適用結果を整理すると下式となる

a11'	a12'	a13'
0	a22'	a23'
0	0	a33'=a33'-ui2'*a23'

以下、行がなくなるまで、順番に行と列を移動しながら適用していく.

上三角行列ができるので、左上から右下方向の対角線上の値を掛けていくと行列の値が算出できる.

a11'*a22'*a33'=a33'-ui2'*a23'

前進消去で行列式を上三角行列に変換する

	1	2	3	kn
1	3286.78	854.23	0	-8.2974921
2	854.23	2720.62	506.08	-3.6881482
3	0	506.08	2408.14	9.0220696

ui1=ai1/a11

aji = aji - ui1 * a1j　　　　　bi=bi-ui1*b1

	1	2	3		ui1
1	3286.78	854.23	0	-8.2974921	
2	0	2498.606694	506.08	-1.5316404	0.259898746
3	0	506.08	2408.14	9.0220696	0

aij'=aji'-ui2*a2j'　　　　　bi=bi-ui1*bi

	1	2	3	kn	ui2'=ai2'/a22'
1	3286.78	854.23	0	-8.2974921	
2	0	2498.606694	506.08	-1.5316404	
3	0	0	2305.636086	9.33229553	0.202544883

後退代入

S3"= 9.3322955 / 2305.636086 = 0.004047601

$$S2'' = \frac{(-1.53164 + -506.08 * 0.004047601)}{2498.606694}$$

= -0.001433

$$S1'' = \frac{(-8.297492 + 0 * 0.004047601 + -854.23 * -0.001432819)}{3286.78}$$

= -0.002152

S1"～S3"の値よりan,bn,cn,dnを算定する。

$$a_n = \frac{(S_{n+1}''(x) - S_n''(x))}{6(x_{n+1} - x_n)} \qquad b_n = \frac{S_n''(x_n)}{2}$$

$$c_n = \frac{(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)} - \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)(2S_n''(x_n) + S_{n+1}''(x_n))$$

$$d_n = y_n$$

	x	y	Sn"	a	b	c	d
0	2041.68	1575.59	0	-4.54516E-07	0	1.199731674	1575.59
1	2830.84	2298.99	-0.002152117	1.4034E-07	-0.0010761	0.350549323	2298.99
2	3685.07	1900.71	-0.001432819	1.80486E-06	-0.0007164	-1.180630528	1900.71
3	4191.15	1353.67	0.004047601	-9.6649E-07	0.0020238	-0.518985955	1353.67
4	4889.14	1648.74	0	0	0	1.72698104	1648.74
5	5403.39	2536.84					

xを変化させながら、an,bn,cn,dnより補間値ｙを算出する。

$$y_n = S_n = a_n(x - x_n)^3 + b_n(x - x_n)^2 + c_n(x - x_n) + d_n$$

各区間のxを4分割して補間すると下表のとおりとなる。

	x	y	Sn"	a	b	c	d
0	2041.68	1575.59					
			0	-4.54516E-07	0	1.199731674	1575.59
				-4.54516E-07	0	1.199731674	1575.59
				-4.54516E-07	0	1.199731674	1575.59
1	2830.84	2298.99					
			-0.002152117	1.4034E-07	-0.0010761	0.350549323	2298.99
				1.4034E-07	-0.0010761	0.350549323	2298.99
				1.4034E-07	-0.0010761	0.350549323	2298.99
2	3685.07	1900.71					
			-0.001432819	1.80486E-06	-0.0007164	-1.180630528	1900.71
				1.80486E-06	-0.0007164	-1.180630528	1900.71
				1.80486E-06	-0.0007164	-1.180630528	1900.71
3	4191.15	1353.67					
			0.004047601	-9.6649E-07	0.0020238	-0.518985955	1353.67
				-9.6649E-07	0.0020238	-0.518985955	1353.67
				-9.6649E-07	0.0020238	-0.518985955	1353.67
4	4889.14	1648.74					
			0	0	0	1.72698104	1648.74
				0	0	1.72698104	1648.74
				0	0	1.72698104	1648.74
5	5403.39	2536.84					

	x-xn	x	x-xn	yn
0		2041.68		1575.59
		2238.97	197.29	1808.794746
		2436.26	394.58	2021.057593
		2633.55	591.87	2191.436644
1	789.16	2830.84		2298.99
		3044.3975	213.5575	2326.143715
		3257.955	427.115	2263.34747
		3471.5125	640.6725	2118.80249
2	854.23	3685.07		1900.71
		3811.59	126.52	1743.524121
		3938.11	253.04	1585.334364
		4064.63	379.56	1448.072425
3	506.08	4191.15		1353.67
		4365.6475	174.4975	1319.596429
		4540.145	348.995	1377.958061
		4714.6425	523.4925	1497.943163
4	697.99	4889.14		1648.74
		5017.7025	128.5625	1870.765
		5146.265	257.125	2092.79
		5274.8275	385.6875	2314.815
5	514.25	5403.39		2536.84

補間結果をグラフに表した結果が下図のとおりである。