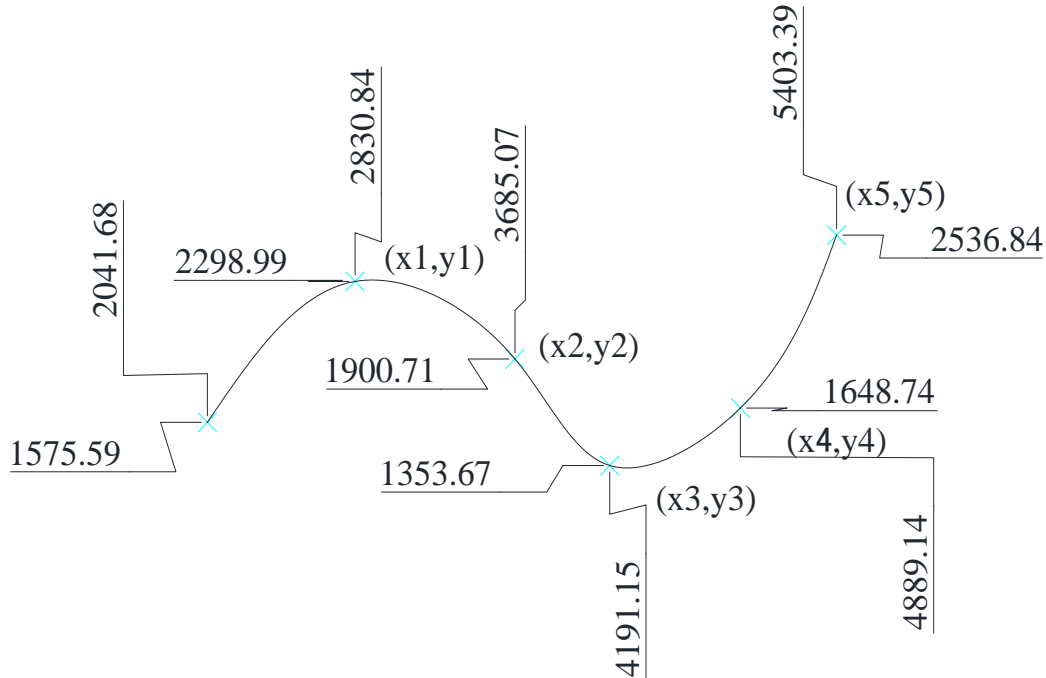


### 3次スプライン曲線の作成方法(パラメトリック版)

xの関数となる通常のスプラインで(ノンパラメトリックスプライン曲線)は、1区間のxに対するyの値は一つしかないため、たとえば下図のx4~x5の区間のように、同じxの値に対してそれぞれ違うyを持つ曲線を描くことはできません。また、3次元空間にスプライン曲線を描画する場合は、新たな手法が必要となります。



たとえばxも別の変数から算出してしまえば、曲線の自由度が増します。このような手法をパラメトリック曲線といいます。たとえば円を角度 $\theta$ でパラメトリック曲線化すると、下式のようになります。

$$x = r \cdot \cos\theta$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

### スプライン曲線も同様にx,yともに共通の変数tによって算出する

ノンパラメトリックの場合は、 $y=s(x)$ の様に表現していましたが、パラメトリックの場合は $x=s(t)$ ,  $y=s(t)$ の様な式になります。この場合、tの決め方ですが、単純に0, 1, 2, ... Nのような決め方が計算が楽になります。言い方を変えると、先に $t=0, 1, 2, \dots, N$ と決めておき、既知点tとxに対して補間式の算定、既知点tとyに対して補間式の算定をし、x, yをそれぞれ求めて作図すればパラメトリック曲線が作図できるというわけです。補間式はノンパラメトリック $y=s(x)$ の場合のxをtに、さらにxを求めるときはyをxに置きかえるだけです。ただしtが0, 1, 2, ... Nと1ずつ増えるため、式の簡略化が可能となります。この場合、 $z=s(t)$ とすれば三次元空間にスプライン曲線を描画することができます。

### 既知点

下図のように6点の既知点からなる3次スプライン曲線を例に算出方法を説明する。

既知点を $x_n, y_n$ とすると座標一覧は下表のとおりである。

t	X	Y
0	0	2041.68
	2041.68	1575.59

1	1	2830.84	2298.99
2	2	3685.07	1900.71
3	3	4191.15	1353.67
N-1	4	4889.14	1648.74
N	5	5403.39	2536.84

### ノンパラメトリック3次スプライン曲線による補間式の簡略化

3次スプライン曲線による補間式は、ノンパラメトリックスプライン曲線で算出している。ここでは、tが1置きに増加するという性質より式を簡略化する。まず、単純にノンパラメトリックスプライン曲線の式でxと表現しているものはtに置き換える。

スプライン曲線の二次導関数を算出式は、下式のとおりとなる。(算出過程は、ノンパラメトリックスプライン曲線を簡素化するために下式とおく。

$$h_n = t_{n+1} - t_n = 1$$

$$h_{n+1} - h_n = t_{n+2} - t_{n+1} + t_{n+1} - t_n = x_{n+2} - x_n = 2$$

$$k_n = 6 \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{1} \right) = 6(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

より一般的な表記をすると0~N-2について下記式の連立方程式が成り立つ。

$$n=0 \text{ の時} \quad 2(h_1 + h_0)S_1'' + h_1 S_2'' = k_1$$

$$n=1 \sim N-4 \quad h_n S_n'' + 2(h_{n+1} + h_n)S_{n+1}'' + h_{n+1} S_{n+2}'' = k_{n+1}$$

$$n=N-3 \quad h_{N-3} S_{N-3}'' + 2(h_{N-2} + h_{N-3})S_{N-2}'' = k_{N-3}$$

連立方式を行列で示すと下式のとおりとなる。

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_0) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_2 + h_1) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_3 + h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1'' \\ S_2'' \\ S_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1'' \\ S_2'' \\ S_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

xの補間式の算定

t	X	hn	kn
0	0	2041.68	

1	1	2830.84	1	390.42
2	2	3685.07	1	-2088.9
3	3	4191.15	1	1151.46
N-1	4	4889.14	1	-1102.44
N	5	5403.39	1	

### ガウスの消去法

ガウスの前進消去法を用いて上三角行列を作成する。

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}$$

上記の行列2列目以降に下式を適用する。

$$u_{i1} = a_{i1} / a_{11}$$

$$a_{ji} = a_{ji} - u_{i1} * a_{1j} \quad b_i = b_i - u_{i1} * b_1$$

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} - u_{11} * a_{11} & a_{22} - u_{11} * a_{12} & a_{23} - u_{11} * a_{13} \\
 a_{31} - u_{11} * a_{11} & a_{32} - u_{11} * a_{12} & a_{33} - u_{11} * a_{13}
 \end{array}$$

式が複雑なので適用結果を $a_{ij}'$ と置く

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\
 0 & a_{22}' & a_{23}' \\
 0 & a_{32}' & a_{33}'
 \end{array}$$

更に3行目2列目以降の行に下式を適用する

$$u_{i2} = a_{i2}' / a_{22}'$$

$$a_{ij}' = a_{ij}' - u_{i2} * a_{2j}' \quad b_i = b_i - u_{i2} * b_2$$

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\
 0 & a_{22}' & a_{23}' \\
 0 & a_{32}' - u_{i2} * a_{22}' & a_{33}' - u_{i2} * a_{23}'
 \end{array}$$

適用結果を整理すると下式となる

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\
 0 & a_{22}' & a_{23}'
 \end{array}$$

$$0 \qquad 0 \qquad a_{33}' = a_{33}' - u_{i2}' * a_{23}'$$

以下、行がなくなるまで、順番に行と列を移動しながら適用していく。

上三角行列ができるので、左上から右下方向の対角線上の値を掛けていくと行列の値が算出できる。

$$a_{11}' * a_{22}' * a_{33}' = a_{33}' - u_{i2}' * a_{23}'$$

前進消去で行列式を上三角行列に変換する

	1	2	3	kn
1	4	1	0	390.42
2	1	4	1	-2088.9
3	0	1	4	1151.46

$$u_{i1} = a_{i1} / a_{11}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - u_{i1} * a_{1j} \qquad b_i = b_i - u_{i1} * b_1$$

	1	2	3	kn	$u_{i1}$
1	4	1	0	390.42	
2	0	3.75	1	-2186.505	0.25
3	0	1	4	1151.46	0

$$a_{ij}' = a_{ij}' - u_{i2}' * a_{2j}' \qquad b_i = b_i - u_{i2}' * b_2$$

	1	2	3	kn	$u_{i2}' = a_{i2}' / a_{22}'$
1	4	1	0	390.42	
2	0	3.75	1	-2186.505	
3	0	0	3.733333333	1734.528	0.266666667

後退代入

$$S_3'' = 1734.528 / 3.733333333 = 464.6057143$$

$$S_2'' = \left( \frac{-2186.505 + (-1 * 464.6057143)}{3.75} \right)$$

$$= -706.9629$$

$$S1'' = \frac{(390.42 + 0 * 464.6057143 + (-1 * -706.9628571))}{4}$$

$$= 274.34571$$

S1''~S3''の値よりan,bn,cn,dnを算定する。

$$a_n = \frac{(S_{n+1}''(x) - S_n''(x))}{6(x_{n+1} - x_n)} \quad b_n = \frac{S_n''(x_n)}{2}$$

$$c_n = \frac{(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)} - \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)(2S_n''(x_n) + S_{n+1}''(x_n))$$

$$d_n = y_n$$

t	x	Sn''	a	b	c	d
0	0	2041.68	0	45.72428571	0	2041.68
1	1	2830.84	274.3457143	-163.551429	137.172857	2830.84
2	2	3685.07	-706.9628571	195.2614286	-353.48143	3685.07
3	3	4191.15	464.6057143	-77.4342857	232.302857	4191.15
4	4	4889.14	0	0	0	4889.14
5	5	5403.39				5403.39

xを変化させながら、an,bn,cn,dnより補間値yを算出する。

$$y_n = S_n = a_n(x-x_n)^3 + b_n(x-x_n)^2 + c_n(x-x_n) + d_n$$

各区間のxを4分割して補間すると下表のとおりとなる。

	x	x	Sn''	a	b	c	d	
0	0	2041.68		45.72428571		0	743.4357143	2041.68
				0	45.72428571	0	743.4357143	2041.68
				0	45.72428571	0	743.4357143	2041.68
				0	45.72428571	0	743.4357143	2041.68
1	1	2830.84		-163.551429	137.172857	880.6085714	2830.84	
			274.3457143	-163.551429	137.172857	880.6085714	2830.84	
			274.3457143	-163.551429	137.172857	880.6085714	2830.84	
			274.3457143	-163.551429	137.172857	880.6085714	2830.84	
2	2	3685.07		195.2614286	-353.48143	664.3	3685.07	
			-706.9628571	195.2614286	-353.48143	664.3	3685.07	
			-706.9628571	195.2614286	-353.48143	664.3	3685.07	
			-706.9628571	195.2614286	-353.48143	664.3	3685.07	
3	3	4191.15		-77.4342857	232.302857	543.1214286	4191.15	
			464.6057143	-77.4342857	232.302857	543.1214286	4191.15	
			464.6057143	-77.4342857	232.302857	543.1214286	4191.15	
			464.6057143	-77.4342857	232.302857	543.1214286	4191.15	
4	4	4889.14			0	0	514.25	4889.14
				0	0	0	514.25	4889.14
				0	0	0	514.25	4889.14
				0	0	0	514.25	4889.14
5	5	4815.92						

	t-tn	t	t-tn	xn
0		0	0	2041.68
		0.25	0.25	2228.253371
		0.5	0.5	2419.113393
		0.75	0.75	2618.546719
1	1	1	0	2830.84
		1.25	0.25	3057.009955
		1.5	0.5	3284.993571
		1.75	0.75	3499.457902
2	1	2	0	3685.07
		2.25	0.25	3832.103371
		2.5	0.5	3953.257321
		2.75	0.75	4066.837612
3	1	3	0	4191.15
		3.25	0.25	4340.239375
		3.5	0.5	4511.107143
		3.75	0.75	4696.493839
4	1	4	0	4889.14
		4.25	0.25	5017.7025
		4.5	0.5	5146.265
		4.75	0.75	5274.8275
5	1	5	0	5403.39

yの補間式の算定

t	Y	hn	kn
0	0	1575.59	
1	1	2298.99	1 -6730.08
2	2	1900.71	1 -892.56
3	3	1353.67	1 5052.66
N-1	4	1648.74	1 3558.18
N	5	2536.84	1

ガウスの消去法

ガウスの前進消去法を用いて上三角行列を作成する。

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

上記の行列2列目以降に下式を適用する。

$$\begin{aligned} u_{i1} &= a_{i1}/a_{11} \\ a_{ji} &= a_{ji} - u_{i1} * a_{1j} & b_i &= b_i - u_{i1} * b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-u_{11}*a_{11} & a_{22}-u_{11}*a_{12} & a_{23}-u_{11}*a_{13} \\ a_{31}-u_{11}*a_{11} & a_{32}-u_{11}*a_{12} & a_{33}-u_{11}*a_{13} \end{matrix}$$

式が複雑なので適用結果を $a_{ij}'$ と置く

$$\begin{matrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{matrix}$$

更に3行目2列目以降の行に下式を適用する

$$\begin{aligned} u_{i2}' &= a_{i2}'/a_{22}' \\ a_{ij}' &= a_{ij}' - u_{i2}' * a_{2j}' & b_i &= b_i - u_{i2}' * b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' - u_{i2}' * a_{22}' & a_{33}' - u_{i2}' * a_{23}' \end{matrix}$$

適用結果を整理すると下式となる

$$\begin{matrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & 0 & a_{33}' - u_{i2}' * a_{23}' \end{matrix}$$

以下、行がなくなるまで、順番に行と列を移動しながら適用していく。  
上三角行列ができるので、左上から右下方向の対角線上の値を掛けていくと

$$a_{11}' * a_{22}' * a_{33}' = a_{33}' - u_{i2}' * a_{23}'$$

前進消去で行列式を上三角行列に変換する

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & kn \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -6730.08 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -892.56 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 5052.66 \end{matrix}$$

$$u_{i1} = a_{i1} / a_{11}$$

$$a_{ji} = a_{ji} - u_{i1} * a_{1j}$$

$$b_i = b_i - u_{i1} * b_1$$

	1	2	3	u <sub>i1</sub>	
1	4	1	0	-6730.08	
2	0	3.75	1	789.96	0.25
3	0	1	4	5052.66	0

$$a_{ij}' = a_{ij} - u_{i2} * a_{2j}'$$

$$b_i = b_i - u_{i1} * b_i$$

	1	2	3 kn	u <sub>i2</sub> ' = a <sub>i2</sub> ' / a <sub>22</sub> '	
1	4	1	0	-6730.08	
2	0	3.75	1	789.96	
3	0	0	3.733333333	4842.004	0.266666667

後退代入

$$S_3'' = 4842.004 / 3.733333333 = 1296.965357$$

$$S_2'' = \left( \frac{789.96 + (-1 * 1296.965357)}{3.75} \right) = -135.2014$$

$$S_1'' = \left( \frac{-6730.08 + (0 * 1296.965357 + (-1 * -135.2014286))}{4} \right) = -1648.72$$

S<sub>1</sub>'' ~ S<sub>3</sub>'' の値より a<sub>n</sub>, b<sub>n</sub>, c<sub>n</sub>, d<sub>n</sub> を算定する。

$$a_n = \frac{(S_{n+1}''(x) - S_n''(x))}{6(x_{n+1} - x_n)} \quad b_n = \frac{S_n''(x_n)}{2}$$

$$c_n = \frac{(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)} - \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)(2S_n''(x_n) + S_{n+1}''(x_n))$$

$$d_n = y_n$$

t	y	S <sub>n</sub> ''	a	b	c	d
0	0	1575.59	0	-274.786607	0	998.1866071
1	1	2298.99	-1648.719643	252.2530357	-824.35982	173.8267857
2	2	1900.71	-135.2014286	238.6944643	-67.600714	-718.13375
3	3	1353.67	1296.965357	-216.160893	648.482679	-137.2517857
4	4	1648.74	0	0	0	888.1
5	5	2536.84				

x を変化させながら、a<sub>n</sub>, b<sub>n</sub>, c<sub>n</sub>, d<sub>n</sub> より補間値 y を算出する。

$$y_n = S_n = a_n(x - x_n)^3 + b_n(x - x_n)^2 + c_n(x - x_n) + d_n$$



各区間のxを4分割して補間すると下表のとおりとなる。

	y	y	Sn''	a	b	c	d	
0	0	1575.59		-274.786607	0	998.1866071	1575.59	
				0	-274.786607	0	998.1866071	1575.59
				0	-274.786607	0	998.1866071	1575.59
				0	-274.786607	0	998.1866071	1575.59
1	1	2298.99		252.2530357	-824.35982	173.8267857	2298.99	
			-1648.719643	252.2530357	-824.35982	173.8267857	2298.99	
			-1648.719643	252.2530357	-824.35982	173.8267857	2298.99	
			-1648.719643	252.2530357	-824.35982	173.8267857	2298.99	
2	2	1900.71		238.6944643	-67.600714	-718.13375	1900.71	
			-135.2014286	238.6944643	-67.600714	-718.13375	1900.71	
			-135.2014286	238.6944643	-67.600714	-718.13375	1900.71	
			-135.2014286	238.6944643	-67.600714	-718.13375	1900.71	
3	3	1353.67		-216.160893	648.482679	-137.2517857	1353.67	
			1296.965357	-216.160893	648.482679	-137.2517857	1353.67	
			1296.965357	-216.160893	648.482679	-137.2517857	1353.67	
			1296.965357	-216.160893	648.482679	-137.2517857	1353.67	
4	4	1648.74		0	0	888.1	1648.74	
			0	0	0	888.1	1648.74	
			0	0	0	888.1	1648.74	
			0	0	0	888.1	1648.74	
5	5	2536.84						

	t-tn	t	t-tn	yn
0		0	0	1575.59
		0.25	0.25	1820.843111
		0.5	0.5	2040.334978
		0.75	0.75	2208.304355
1	1	1	0	2298.99
		1.25	0.25	2294.865661
		1.5	0.5	2211.345067
		1.75	0.75	2072.076939
2	1	2	0	1900.71
		2.25	0.25	1720.681119
		2.5	0.5	1554.579754
		2.75	0.75	1424.783513
3	1	3	0	1353.67
		3.25	0.25	1356.509707
		3.5	0.5	1420.144665
		3.75	0.75	1524.309791
4	1	4	0	1648.74
		4.25	0.25	1870.765
		4.5	0.5	2092.79
		4.75	0.75	2314.815
5	1	5	0	2536.84



